8η Άσκηση Άλγεβρας Β΄ Λυκείου

2022-2023

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x+2\pi)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $[0,4\pi]$ είναι οι $\rho_1=\pi$ και $\rho_2=3\pi$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $T=4\pi$.

β) Να αποδείξετε ότι οι θετικές τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x ορίζουν αριθμητική πρόοδο και να βρείτε τον γενικό της όρο.

Έστω ότι $f(x)=\alpha\eta\mu\left(\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{5\pi}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,-2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να χαράξετε την γραφική της παράσταση.

ε) Αν $-\pi<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{3}$, τότε να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\dfrac{\pi-3x_1}{2}\right)$ και $f\left(\dfrac{\pi-3x_2}{2}\right)$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Ονομάζουμε (1) την αρχική σχέση και βάζουμε για x το $x+2\pi$ και προκύπτει:

$f(x+2\pi+2\pi)=-f(x+2\pi)\Leftrightarrow f(x+4\pi)=-f(x+2\pi)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x+4\pi)=f(x)$ (2)

Βάζουμε για x το $x-4\pi$ στην (2) και προκύπτει: $f(x-4\pi+4\pi)=f(x-4\pi)\Leftrightarrow f(x)=f(x-4\pi)$ (3)

Από τις (2) και ((3) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τα $x+4\pi, x-4\pi\in\mathbb{R}$ και $f(x+4\pi)=f(x-4\pi)=f(x)$.

Άρα η f είναι περιοδική με περίοδο $T=4\pi$.

β) Αφού η f είναι περιοδική με περίοδο $T=4\pi$ και σε διάστημα μίας περιόδου, δηλαδή στο $[0,4\pi]$, οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι $\rho_1=\pi$ και $\rho_2=3\pi$, τότε ανά 2π έχουμε και μία ρίζα.

Δηλαδή οι ρίζες έχουν την μορφή $\pi+2\kappa\pi$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Άρα οι θετικές τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x ορίζουν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο το π και γενικό όρο $\alpha_\kappa=\pi+2\kappa\pi$.

γ) Είναι $f(x)=\alpha\eta\mu\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{5\pi}{2}\right)=\alpha\eta\mu\left(\frac{x}{\alpha}+2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\alpha\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{\alpha}\right)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, $x\in\mathbb{R}$

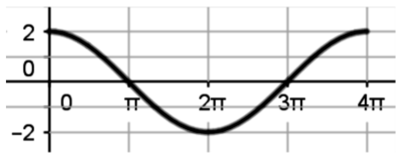
$f(0)=-2\Leftrightarrow \alpha=-2$ άρα $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{x}{2}\right)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$

δ) Η f είναι συμμετρική της $g(x)=2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$ ως προς τον άξονα x΄x, για το λόγο αυτό θα κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της g και στη συνέχεια θα σχεδιάσουμε τη συμμετρική της ως προς τον x΄x. Η g είναι της μορφής ρσυν(ωx) με $\rho=2$ και $\omega=\frac{1}{2}$.

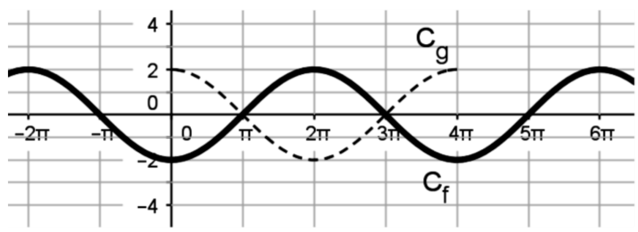
Έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$, έχει μέγιστο το $\rho=2$ και ελάχιστο το $-\rho=-2$.

Χωρίζουμε το διάστημα μιας περιόδου $[0,4\pi]$ στα σημεία: $\frac{T}{4}=\frac{4\pi}{4}=\pi$, $\frac{T}{2}=\frac{4\pi}{2}=2\pi$ και $\frac{3T}{4}=\frac{12\pi}{4}=3\pi$. Ο αντίστοιχος πίνακας μεταβολών της g και η γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0,\pi]$ είναι:

x	0	π	2π	3π	4π
g	2 ↘	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	2



Η γραφική παράσταση της f στο $\mathbb{R}$ είναι:



ε) Είναι $-\pi<x_1<x_2<\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow 3\pi>-3x_1>-3x_2>-\pi\Leftrightarrow -\pi<-3x_2<-3x_1<3\pi\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0<\pi-3x_2<\pi-3x_1<4\pi\Leftrightarrow 0<\frac{\pi-3x_2}{2}<\frac{\pi-3x_1}{2}<2\pi \overset{f\nearrow[0,2\pi]}{\Rightarrow} f\left(\frac{\pi-3x_1}{2}\right)>f\left(\frac{\pi-3x_2}{2}\right)$.